

École Doctorale des Sciences Fondamentales

SUJET DE THÈSE

Titre de la thèse : Quelques problèmes de dynamique linéaire

Directeur de thèse : Frédéric Bayart

Unité de rattachement : Laboratoire de mathématiques Blaise Pascal, UMR 6620

Équipe : Probabilités, Analyse, Statistiques

Établissement de rattachement : Université Clermont Auvergne

Courriel et téléphone : frederic.bayart@uca.fr, (+33) 4 73 40 70 94

Co-encadrant éventuel :

Unité de rattachement :

Établissement de rattachement :

Résumé :

La dynamique linéaire est un sujet très actif de l'analyse fonctionnelle au cours des vingt dernières années. Il s'agit, étant donné un opérateur T agissant sur un espace de Banach X , d'étudier l'ensemble des orbites $\{T^n x ; n > 0\}$ d'un vecteur x sous l'action de T . Existe-t-il des orbites denses ? des orbites dont le sous-espace engendré est dense ? quelles sont les propriétés qualitatives de ces orbites ?

Ce sujet mêle de nombreux domaines de l'analyse mathématique : théorie des opérateurs, analyse complexe pour la production et l'étude d'exemples, théorie ergodique. De nombreuses questions autour de ces sujets restent ouvertes, et je propose dans cette thèse d'en étudier deux.

1. Existence d'opérateurs universels pour la dynamique topologique

On pourrait penser que la dynamique linéaire est moins riche que la dynamique topologique puisqu'on s'impose la restriction de travailler avec des applications linéaires. De façon très étonnante, Feldman a prouvé en 2000 que ce n'est pas le cas : il existe un opérateur T agissant sur un espace de Banach H tel que, pour tout système dynamique $S : K \rightarrow K$, où K est compact, il existe une partie M contenue dans H , stable par T , telle que la restriction de T à M est conjuguée à S .

Cet opérateur T est donc universel au sens qu'il code tous les systèmes dynamiques existants. La première partie de la thèse s'intéressera à l'étude de ces opérateurs universels ? Peut-on trouver une condition nécessaire pour qu'un opérateur soit universel ? Cela permettrait de donner d'autres exemples que celui de Feldman qui à ce jour est encore le seul connu. Quelles sont les propriétés que doit nécessairement vérifier un tel opérateur universel ?

2. Etude de certains problèmes d'existence de vecteurs hypercycliques communs

École Doctorale des Sciences Fondamentales

Lorsqu'un opérateur T admet un vecteur x dont l'orbite est dense, on dit qu'il est hypercyclique, et que x est un vecteur hypercyclique pour T . Lorsqu'on considère une famille d'opérateurs hypercycliques (par exemple, une famille d'opérateurs de translation, ou une famille de décalages pondérés), il est intéressant de se demander s'il existe un vecteur hypercyclique qui soit commun à tous les vecteurs de cette famille. C'est un problème très étudié depuis une dizaine d'années, qui a fait l'objet de progrès récents dans deux directions : pour tous les opérateurs d'un même semigroupe par Bayart, et pour des multiples d'un même opérateur par Shkarin. Ces deux résultats récents utilisent des méthodes assez différentes, et la deuxième partie de la thèse sera consacrée à celles-ci. Le but sera d'obtenir des résultats d'hypercyclicité commune pour tous les multiples des opérateurs d'un même semigroupe.