Le charme envoûtant des équations diophantiennes

Éric Gaudron

Parmi les branches des mathématiques se trouve la théorie des nombres qui s'intéresse aux nombres entiers et à leurs généralisations. Un des plus anciens axes de recherche dans ce domaine, qui remonte à la Grèce Antique, est la résolution des équations diophantiennes. Il s'agit de trouver les solutions entières à une équation polynomiale à coefficients entiers. L'exemple type est l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$ pour laquelle Wiles a montré il y a une vingtaine d'années qu'il n'y avait pas de solutions entières $x, y, z \geq 1$ dès que $n \geq 3$.

À travers quelques exemples significatifs, l'objectif de ce cours est d'évoquer quelques grandes théories mathématiques créées pour (tenter de) résoudre certaines équations diophantiennes. Le contraste entre la formulation simple des problèmes et les techniques souvent ardues qu'il faut mettre en œuvre pour les résoudre se révèle fascinant. Si nous essaierons de mettre en valeur ce contraste, notre approche sera essentiellement historique et culturelle. Elle restera relativement élémentaire d'un point de vue technique. Nous rappellerons toutes les notions nécessaires à la compréhension du cours.

Plan indicatif :

1) Équation de Fermat et théorie algébrique des nombres
2) Équation de Catalan $x^p - y^q = 1$ et théorie des formes linéaires de logarithmes
3) Quadrature du cercle et théorie des nombres transcendants
4) La conjecture abc, Graal des diophantiens.
5) Conjecture des nombres premiers jumeaux et progrès récents de Zhang.